Cours du 29.03.2021 MATIN

lundi, 29 mars 2021 10:07

Rappel

$$\boxed{\underbrace{\vec{x} \wedge \vec{y}}_{\vec{z}} = - \underbrace{\vec{y} \wedge \vec{x}}_{\vec{w}} \quad \vec{z} = -1 \cdot \vec{w}} \Rightarrow \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{y} \wedge \vec{x}\|$$

c.f. série d'exercices !

$$\|\lambda \vec{w}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{w}\|$$

$$\|-1 \vec{w}\| = |-1| \cdot \|\vec{w}\| = \|\vec{w}\|$$

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 \\ -x_1 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \, y_1 \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$- y \wedge \vec{x} = -1 \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -x_2 y_3 + x_3 y_2 \\ x_1 y_3 - x_3 y_1 \\ -x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ -x_1 y_3 + x_3 y_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} \wedge \vec{y} = - \vec{y} \wedge \vec{x}$$

CQFD!

Manière de prouver : $\vec{x} \wedge \vec{y} - (-\vec{y} \wedge \vec{x}) = \vec{0}$

3D : exprimer une droite (équation paramétrique)

Tout point P sur la droite D passant par A et de direction $\vec{x}$ peut s'écrire comme

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{x}$$

C'est vrai qu'on soit en 2D, 3D ou 100D !!!

$$\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1+\lambda\cdot x_1\\ a_2+\lambda\cdot x_2\\ a_3+\lambda x_3\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}p_1 = a_1+\lambda x_1\\ p_2 = a_2+\lambda x_2\\ p_3 = a_3+\lambda x_3\end{cases} \quad \text{Equ. Paramétriques} \quad \lambda\in\mathbb{R}}$$

$$\begin{cases}\lambda = \dfrac{p_1-a_1}{x_1}\\[2mm] \lambda = \dfrac{p_2-a_2}{x_2}\\[2mm] \lambda = \dfrac{p_3-a_3}{x_3}\end{cases} \qquad \lambda+\lambda-\lambda = \lambda$$

3D $\boxed{\lambda = \dfrac{p_1-a_1}{x_1} + \dfrac{p_2-a_2}{x_2} - \dfrac{p_3-a_3}{x_3}}$

Equation cartésienne de la droite !!

⚠ $x_1, x_2, x_3 \neq 0$! ⚠

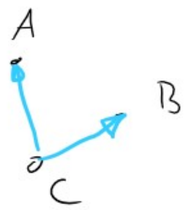
$\alpha p_1 + \beta p_2 + \gamma p_3 + \delta = \lambda$

⚠ le paramètre n'est pas éliminé en 3D !

2D $\boxed{\begin{array}{c} p_1 x_2 - p_2 x_1 - a_1 x_2 + a_2 x_1 = 0 \\ \vec{x} \ /\!/ \text{ à } D \end{array}}$

$\alpha p_1 + \beta p_2 = 0$

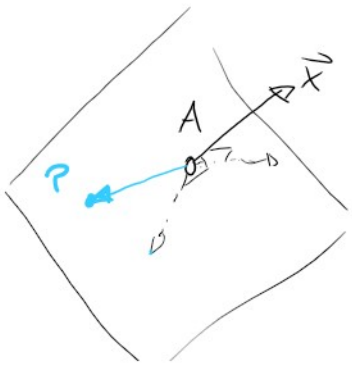
Comment définit-on un PLAN en 3D ?
- 3 points non-colinéaires
- 2 vecteurs non-colinéaire
- 1 vecteur PERPENDICULAIRE au plan et 1 point du plan



Le plan est lui-aussi défini par des équations paramétriques ou une équation cartésienne.

Trouvons l'équation du plan PERPENDICULAIRE au vecteur $\vec{x}$, contenant le point A.

On appelle aussi $\vec{x}$ le vecteur NORMAL.



$\vec{AP} \perp \vec{x}$

$\langle \overrightarrow{AP}, \vec{x} \rangle = 0$ $\qquad$ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 \end{pmatrix}$

$$\left\langle \begin{pmatrix} p_1 - a_1 \\ p_2 - a_2 \\ p_3 - a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1(p_1 - a_1) + x_2(p_2 - a_2) + x_3 \cdot (p_3 - a_3) = 0$$

$$\boxed{x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 - (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3) = 0}$$

Equ. Cartésienne du plan
Orthogonal à $\vec{x}$ qui contient
Le point A.

2D $\quad x_1p_1 + x_2p_2 - (a_1x_1 + a_2x_2) = 0 \Rightarrow$ DROITE

Calcul d'intersections :

2D :
- 2 droites =>
  - 1 point
  - 1 droite (si les droites sont égales !)
  - Ensemble vide (droites parallèles)

3D :
- 2 droites (même résultat qu'en 2D)
  - Peuvent ne pas se couper MEME si elles ne sont pas "parallèles" (c'est le cas si elle sont dans 2 plans parallèles)
- Droite et d'un plan
  - 1 point
  - 1 droite (si la droite est dans le plan)
  - Ensemble vide si le plan est parallèle à la droite

Exemple 2D :

D1 $\quad 3p_1 + 5p_2 - 6 = 0$

D2 $\quad 2p_1 - 1 \cdot p_2 + 2 = 0$

Trouvons leur intersection !!

C'est le cas quand le point p est à la fois sur D1 et sur D2 :

$$\begin{cases} 3p_1 + 5p_2 - 6 = 0 \\ 2p_1 - p_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Système de 2 équ.
2 inconnues

$$\longrightarrow \begin{cases} 3p_1 + 5(2p_1+2) - 6 = 0 \\ p_2 = \underbrace{2p_1 + 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 13p_1 + 4 = 0 \Rightarrow p_1 = -4/13 \\ p_2 = 2p_1 + 2 = -8/13 + 26/13 = 18/13 \end{array}$$

D_1 et D_2 s'intersectent au point $P = \begin{pmatrix} -4/13 \\ 18/13 \end{pmatrix}$

$D_1 : \; 3\left(-\frac{4}{13}\right) + 5\left(\frac{18}{13}\right) - 6 = 0 \Rightarrow P$ est sur D_1

$D_2 : \; 2\left(-\frac{4}{13}\right) - \frac{18}{13} + 2 = 0 \Rightarrow P$ est sur D_2